

Für bestimmte Anwendungen wird (2) noch in anderer Umformung benötigt. Es wird ein spezielles Integral vom Typ (1) betrachtet.

$$Y = Y_{\{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n'}\} \{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{n''}\}} \equiv Y_{(0n'')}^{(0n')},$$

$$\varepsilon_0^\alpha = \varepsilon_{n'}^\alpha = +1, \quad \varepsilon_0^\beta = \varepsilon_{n''}^\beta = -1. \quad (10)$$

Die übrigen ε -Werte seien beliebig. Wir tragen die Konstanten auf der geschlossenen Kurve in der Reihenfolge $\alpha_0 \dots \alpha_{n'} \beta_{n''} \dots \beta_0$ so auf, daß $\alpha_0 \beta_0$ links und $\alpha_{n'} \beta_{n''}$ rechts liegen. Jetzt suchen wir eine Lösung auf, die sich von (2) dadurch unterscheidet, daß jede ihrer Punktfolgen einen Faktor $(\alpha_0 + \beta_0)^{-1} (\alpha_{n'} + \beta_{n''})^{-1}$ enthalten soll. Wir erreichen das durch Partialbruchzerlegung von α_0, β_0 sowie $\alpha_{n'}, \beta_{n''}$. Es entsteht zunächst

$$Y_{(0n'')}^{(0n')} = (\alpha_0 + \beta_0)^{-1} \left\{ Y_{(1n'')}^{(0n')} + Y_{(1n'')}^{(0n'-1)} \right. \\ \left. + Y_{(0n'')}^{(1n'-1)} + Y_{(0n'')}^{(1n'')} \right\} (\alpha_{n'} + \beta_{n''})^{-1}. \quad (11)$$

Graphisch ist dieser Zerlegungsprozeß in Abb. II für das rechte Ende veranschaulicht. Auf die verbleibenden Integrale in der geschweiften Klammer wenden wir (2) an und erhalten wiederum alle erlaubten Punktfolgen für diese Integrale, denen jetzt jeweils zwei der Linienstücke $\alpha_0, \beta_0, \alpha_{n'}$ oder $\beta_{n''}$ fehlen. Gemäß Abb. 2 können wir anschließend im Ergebnis die 4 Gesamtheiten wieder zu einer einzigen zusammenfügen, die sich formal wie (2) darstellen läßt:

$$Y_{(0n'')}^{(0n')} = \sum P, \quad P = \sum_{\lambda=1}^{n'+n''-1} \sigma_\lambda^{-1}, \quad \sigma_\lambda = \sum_{(\lambda)} \{\alpha, \beta\}. \quad (12)$$

Entsprechend (11) nehmen die beiden äußersten Punkte an der Bildung der Punktfolgen nicht teil und bleiben ganz außen. \sum in (12) bedeutet daher die Bildung aller erlaubten Punktfolgen unter Beibehaltung der äußeren Punkte. Eine andere Vorstellung wäre, diese beiden nach links und rechts ins Unendliche zu verschieben. Es bleiben an Stelle der geschlossenen Kurven zwei Hauptlinien, über deren Punkte dann tatsächlich alle erlaubten Punktfolgen ausgeführt werden müssen. Enthält das Integral Faktoren, deren ε_ν vom entsprechenden ε_0 abweichen, so enthalten die Punktfolgen Zacken, wie etwa in Abb. Ib. Das hat in einigen Punktfolgen die Existenz von Vertikalstreifen zur Folge, die neben dem Zacken noch α_0 und β_0 oder $\alpha_{n'}$ und $\beta_{n''}$ oder beides enthalten sollten. Gemäß unserer Ableitung über (11) können jedoch in den zugehörigen σ von (12) nur die Linienstücke des Zackens enthalten sein, nicht dagegen die Linienstücke $\alpha_0 \beta_0$ bzw. $\alpha_{n'} \beta_{n''}$. $\sum_{(\lambda)}$ in (12) bedeutet wie bisher die Summe über alle Linienstücke α im Vertikalstreifen. Sind jedoch $\alpha_0 \beta_0$ oder $\alpha_{n'} \beta_{n''}$ gleichzeitig in σ enthalten, so sind sie zu streichen. Bestehen die beiden Hauptlinien nur aus gleichgerichteten Linienstücken, so fallen (12) und (2) zusammen, da $\alpha_0 \beta_0$ und $\alpha_{n'} \beta_{n''}$ ohnehin außen liegen.

Zum relativistischen Zweikörperproblem der Quantenmechanik II

Von WILHELM MACKE

Aus dem Instituto de Física Teórica, São Paulo, Brasil

(Z. Naturforschg. **8a**, 615—620 [1953]; eingegangen am 30. Juni 1953)

Die vierkomponentige Wellengleichung (1) zur Beschreibung gebundener Zustände zweier Teilchen wird untersucht und durch willkürliche Transformationen in neue Darstellungen überführt. Dabei zeigt sich insbesondere, daß zwei bekannte Darstellungen dieser Gleichung sich ineinander transformieren lassen, deren eine von Tamm-Dancoff-Lévy aus der einzeitigen Darstellung der Feldtheorie abgeleitet wurde, und deren andere vom Verfasser in Teil I bestimmt wurde und auf die Bethe-Salpeter-Gleichung zurückführt.

Das Bewegungsproblem zweier gebundener Dirac-Teilchen, deren Bindungskräfte durch ein Mesonenfeld von ganzzahligem Spin hervorgerufen werden, läßt sich im Impulsraum der Differenzkoordinaten durch die vierkomponentige Wellengleichung

$$W a(\vec{p}) = [\sqrt{m_1^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2} - V] a(\vec{p}) \quad (1)$$

beschreiben. Dabei ist $a(\vec{p})$ die Wellenfunktion, W die Gesamtenergie, m_1 und m_2 sind die Massen der Teilchen, und V schließlich ist ein Integraloperator, der die Wechselwirkung der Teilchen enthält und durch eine Gesamtheit von Graphen gegeben ist,

die topologisch durch die Feynman-Graphen bestimmt werden, aber außerdem noch die Reihenfolge der Punkte und der dazwischenliegenden Vertikalstreifen unterscheiden und diese als virtuelle Übergänge und Zwischenzustände deuten lassen. Sie werden kurz als Lévy-Graphen bezeichnet.

Eine Ableitung der Gl. (1) wurde von Tamm¹, Dancoff² und Lévy³ (TDL) gegeben, die sich auf die einzeitige Feldtheorie aufbaut. In diesem Falle

¹ I. Tamm, J. Physics [Moskau] **9**, 449 [1945].

² S. M. Dancoff, Physic. Rev. **78**, 382 [1950].

³ M. Lévy, Physic. Rev. **88**, 72 [1952].



enthält V die Gesamtheit aller Lévy-Graphen, deren Zwischenzustände vom Grundzustand (zwei Fermionen) verschieden sind, einschließlich aller Vakuum- und Selbstenergiegraphen, und $a(\vec{p})$ ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die alleinige Anwesenheit der beiden Fermionen. Eine andere Ableitung⁴ der Gl. (1) von Macke geht auf die allgemeine Bethe-Salpeter-Gleichung⁵ (BS) zurück und führt formal auf die gleiche Darstellung (1). Hier besteht jedoch V aus einer anderen Gesamtheit von Graphen, mit gelegentlich etwas anderen Energien in den Zwischenzuständen. Wie in einer kurzen Notiz⁶ bereits gezeigt wurde und in Teil III⁷ ausführlich dargestellt werden soll, sind in dieser Gleichung die Vakuumgraphen nicht enthalten und die Renormalisierung aller divergierenden Graphenbestandteile läßt sich einfach durchführen, so daß der Operator V eindeutig und divergenzfrei dargestellt werden kann. Dagegen bleibt hier die physikalische Bedeutung von $a(\vec{p})$ ungeklärt⁸.

Die Tatsache, daß W in (1) nicht nur explizit auftritt, sondern auch noch in den Energienennern von V enthalten ist, macht es verständlich, daß Transformationen von (1) existieren, bei denen sich die äußere Form von (1) reproduziert, bei denen aber a einem Bedeutungswandel unterworfen wird und V eine andere Gesamtheit von Graphen umfaßt. Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß sich sogar ziemlich willkürliche Transformationen angeben lassen, die V auf entsprechend willkürliche andere Gesamtheiten von Graphen transformieren. Anschließend wird die Graphengesamtheit der BS-Gleichung diskutiert und in eine andere Gesamtheit überführt. Eine entsprechende Diskussion der Graphengesamtheit der TDL-Gleichung führt weiter zur Angabe einer Transformation zwischen der TDL- und BS-Gleichung, die einen direkten Vergleich der beiden zugehörigen Wellenfunktionen erlaubt. Die Unterschiede zwischen a_{TDL} und a_{BS} machen sich erst in der 6. Ordnung der Kopplungskonstanten bemerkbar.

Allgemeine Transformationen der einzeitigen Gleichung

Vor einer weiteren Behandlung von (1) führen wir den Operator f ein durch

⁴ W. Macke, Teil I: Z. Naturforschg., **8a**, 583 [1953]; vorl. Mitteilung in Physic. Rev. **91**, 195 [1953].

⁵ E. Salpeter u. H. A. Bethe, Physic. Rev. **84**, 1232 [1951].

⁶ W. Macke, Nuovo Cimento, **10**, 1198 [1953].

$$V = \Delta E_0 f, \text{ wo } f = \Sigma f_{n\tau\pi} \quad (2)$$

und erhalten für die einzelnen Graphen mit n Punkten, einer Feynman-Topologie τ und einer Punktfolge π analytische Ausdrücke der Form

$$f_{n\tau\pi} = J^{(n\tau)} \frac{(-1)^R \lambda^n}{2 \omega_1 \dots 2 \omega_n} \cdot \frac{\Gamma_1 \dots \Gamma_{2n}}{\Delta E_0 \dots \Delta E_{2n-1}}, \quad (3)$$

wie das in Teil I gezeigt wurde. $J^{(n\tau)}$ enthält die gleichen Impulsintegrationen wie der zugehörige Feynman-Graph, hier jedoch nur über die Ortskomponenten $\vec{dk}_1 \dots$ verlaufend. Sämtliche übrigen Größen sind in I definiert. Die Γ sind den Übergängen zugeordnet und die ΔE den Vertikalstreifen zwischen ihnen. ΔE_0 entspricht dem Vertikalstreifen links vom Graphen. Die ΔE sind darstellbar durch

$$\Delta E = \Sigma (E^{(1)} - \varepsilon_1^z W) + \Sigma (E^{(2)} - \varepsilon_2^z W) + \Sigma \omega, \\ \zeta_1 + \zeta_2 = 1, \quad \zeta_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

$E^{(1)}$, $E^{(2)}$ und ω sind die positiven Energien der freien Teilchen in den Zwischenzuständen, und die Summen laufen über alle Teilchen, die in dem zugehörigen Zwischenzustand durch eine Linie vertreten sind. Die ε -Faktoren sind gleich ± 1 , je nachdem ob die Linie des zugehörigen Teilchens in dem Zwischenzustand nach vorwärts oder rückwärts läuft. Für alle normalen Zwischenzustände hat das zur Folge, daß die Gesamtenergie in ΔE als $-W$ auftritt. In der Gleichung, welche aus der BS-Gleichung abgeleitet wurde, tritt noch die Vorschrift zu (4), daß zwei Fermionen dann nicht mitzuzählen sind, wenn sie sich beide im Anfangszustand oder beide in Endzustand befinden.

f aus (2), (3) und (4) ist nunmehr durch eine Gesamtheit von Graphen $f_{n\tau\pi}$ repräsentiert und als Integraloperator bzw. Matrix darstellbar. Graphengesamtheiten vom Typ f können daher addiert und multipliziert werden wie algebraische Größen. Das Produkt zweier Gesamtheiten f_1 und f_2 ist gleich der Gesamtheit aller Lévy-Graphen, die man erhält, wenn man die Hauptfermionenlinien der Graphen f_1 und f_2 miteinander verbindet. Die Wellengl. (1) lautet wegen (2) und (4) hier einfach

$$a = fa. \quad (5)$$

Sie schreibt vor, den Parameter W des Operators f so zu variieren, daß er bei 1 einen Eigenwert hat.

⁷ W. Macke, Teil III: Z. Naturforschg., in Vorbereitung.

⁸ Auf die Wichtigkeit insbesondere des letzten Punktes wurde der Verfasser zuerst in einem Brief von G. Lüders hingewiesen.

Gl. (5) bleibt invariant bei Transformation der Größen a und f in a' und f' :

$$f' = U^{-1} f U, \quad a = U a' \quad (6)$$

mit U als beliebiger Transformationsmatrix, die ein Inverses besitzt. Wählen wir für U speziell

$$U = 1 - g, \quad U^{-1} = 1 + g + g^2 + \dots \quad (7)$$

mit einer beliebigen Gesamtheit g von Graphen, die wie f in (3) definiert sind und insbesondere wie f einen Faktor ΔE_0^{-1} tragen, so erhalten wir in den gestrichenen Größen eine Gleichung vom Typ (5), die sich wieder auf (1) zurückführen läßt. a' hat jedoch eine andere Bedeutung als a , und V' bzw. f' enthält eine andere Gesamtheit von Graphen als V bzw. f . An diesem Beispiel ist explizit gezeigt, daß eine beliebige Anzahl verschiedener Darstellungen der Gl. (1) existieren, und es bleibt zunächst zu untersuchen, durch welche Transformationen die Gln. (1) von BS und TDL sich auf einfachere Graphengesamtheiten zurückführen, und weiter, ob sich diese beiden Gleichungen ineinander transformieren lassen.

Die einzeitige Form der BS-Gleichung

Bevor mit den f -Gesamtheiten weitergerechnet wird, muß eine zweckmäßige Darstellung dieser Graphen aufgesucht werden. Wir kennzeichnen die Topologie des Graphen durch einen schraffierten Bereich. Die Vertikalstreifen, welche zur Bestimmung der Faktoren ΔE dienen, werden durch vertikale Striche repräsentiert. Die Punkte (Übergänge) werden nur gelegentlich eingezeichnet, genau wie unter den Strichen nur die wichtigsten Vertreter eingezeichnet werden. Eine so allgemeine Darstellung der Lévy-Graphen erlaubt uns die Betrachtung eines beliebigen Graphen irgendeiner Gesamtheit, und alle Operationen an diesen beliebigen Vertretern können als Operationen an der zugehörigen Graphengesamtheit aufgefaßt werden. In Abb. 1 sind einige charakteristische Typen solcher Graphen dargestellt und definiert, mit denen wir im folgenden zu tun haben werden. Falls die Graphen am Anfang oder Ende neben Vakuumteilchen noch die beiden Fermionenlinien in den Zwischenzuständen am Anfang oder Ende enthalten, spielt die Vorschrift eine Rolle, die im Zusammenhang mit (4) gegeben wurde. Sie bedeutet in der graphischen Darstellung der Abb. 1, daß bei ihrer Gültigkeit die Graphen f' an die Stelle der Graphen f treten. Enthalten die Lévy-Graphen keine solchen Zwi-

schenzustände am Anfang oder Ende, so fallen f' und f für diese Graphen zusammen. Es sind also auch diese letzteren Graphen mit in den Typen von Abb. 1 enthalten.

Die in Teil I abgeleitete einzeitige Gl. (5), welche auf die Bethe-Salpeter-Gleichung zurückführt, wird im folgenden mit den Indizes BS bezeichnet:

$$a_{BS} = f_{BS} a_{BS}. \quad (8)$$

Dabei war f_{BS} gegeben durch einen Operator \check{f}_{BS} :

$$\check{f}_{BS} = f_{BS} + f_{BS}^2 + f_{BS}^3 + \dots = (1 - f_{BS})^{-1} f_{BS}; \quad (9)$$

\check{f}_{BS} bestand aus der Gesamtheit aller Lévy-Graphen, die sich aus den Feynman-Graphen $G = \sum_{n=1}^{\infty} (DC)^n$ bilden lassen, welche durch (I. 3) und Abb. I, 1 gegeben sind. Diese Gesamtheit \check{f}_{BS} von Lévy-Graphen setzt sich aus den verschiedenen Typen der Abb. 1 zusammen. Sie enthält zunächst die Graphen f' mit einer inneren Struktur $(DC)^n$,

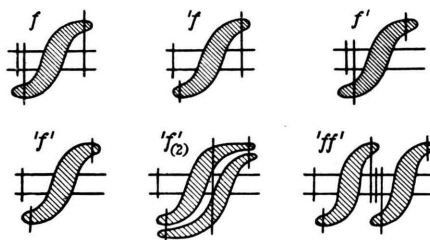


Abb. 1. Darstellung von charakteristischen Graphen und deren Definition f , f' , f'' , $f'_{(2)}$ und $f'f'$.

die sich nicht weiter zerlegen lassen in Typen wie $f'_{(2)}$ und $f'f'$ aus Abb. 1, bei denen jeder Bestandteil für sich eine innere Struktur vom Typ $(DC)^n$ hat. Weiter enthält die Gesamtheit \check{f}_{BS} dann alle Graphen vom Typ $f'_{(2)}$, vom Typ $f'f'$ und entsprechende Glieder höherer Ordnung, wobei jede innere Struktur wieder von der Form $(DC)^n$ sein soll und im Sinne von Abb. 1 nicht weiter zerlegbar ist in Bestandteile mit der gleichen Struktur.

Zur Identifizierung von f_{BS} aus \check{f}_{BS} läßt sich nun ein Satz über die graphische Darstellung von Partialbruchzerlegungen verwenden, der in I, Abb. 5 dargestellt ist. Mit diesem Satz läßt sich das Produkt $f' \cdot f'$ durch successive Partialbruchzerlegung überführen in die Summe von $f'f'$ und $f'_{(2)}$, also:

$$f'^2 = f'f' + f'_{(2)}. \quad (10)$$

Durch Anwendung der successiven Partialbruchzerlegung auf f'^3 bzw. f'^n lassen sich alle im Sinne

von Abb. 1 $f'_{(2)}$ und ff' zusammengesetzten Terme dritter bzw. n -ter Ordnung behandeln, woraus schließlich folgt

$$f_{BS} = \sum_{v=1}^{\infty} f'^v, \quad f_{BS} = f'[(DC)^n], \quad n \geq 1; \quad (11)$$

f_{BS} ist demnach gleich der Gesamtheit aller Lévy-Graphen vom Typ der Abb. 1 f' , die sich nicht weiter in die Verknüpfungen der Abb. 1 $f'_{(2)}$ und ff' zerlegen lassen. Dies gilt nur für Zerlegungen, bei denen wieder für jeden Bestandteil einzeln eine innere Struktur vom Typ $(DC)^n$ gefordert wird. Lassen wir die letztere Forderung fallen, so sind auch die Graphen $f'[(DC)^n]$ noch weiter zerlegbar im Sinne von Abb. 1 $f'_{(2)}$ und ff' , da bereits ein DC -Graph allein schon in mehrere Bestandteile zerlegbar sein kann, s. Gl. (12).

Diese letztere Tatsache kann benutzt werden, um f_{BS} aus (8) auf eine kleinere Gesamtheit von Graphen zurückzuführen. Bezeichnen wir die Zerlegungen im Sinne der beiden letzten Figuren von Abb. 1 symbolisch durch einen Punkt, dann läßt sich über die Zerlegbarkeit der Gesamtheit f_{BS} aussagen:

$$(DC)^n \doteq (DC)^{n_1} \cdot (DC)^{n_2},$$

$$DC = (1 + d + d \cdot d + d \cdot d \cdot d + \dots) C. \quad (12)$$

Die erste Zeile enthält die Tatsache, daß alle im Sinne dieser Zeile zerlegbaren Graphen bereits aus f_{BS} gestrichen sind. Wir definieren $D = 1 + d$. Dann ist d die Gesamtheit aller irreduziblen Selbstenergiegraphen δ und deren Potenzen δ^n . Die zweite Zeile folgt dann aus der Zerlegbarkeit von d in getrennte Bestandteile mit irgendwelchen Potenzen von δ^n .

Mit f'_G wird die Gesamtheit im Sinne von Abb. 1 f' bezeichnet, welche alle $(DC)^n$ -Graphen umfaßt, aber nun in keiner Weise mehr Typen der letzten beiden Figuren von Abb. 1 enthält, auch nicht, wenn man ein Zerreißen der $(DC)^n$ -Struktur zuläßt. Weiter wird die Gesamtheit der unzerlegbaren Graphen $F = (1 + G)d$ mit f'_F bezeichnet. Da nun beide Verknüpfungen zusammen, die in (12) symbolisch durch einen Punkt dargestellt sind, nach (10) der Operatorenmultiplikation der gestrichenen f entsprechen, finden wir für f_{BS} die Darstellung

$$f_{BS} = f'_G + f'_F f'_G + f'_F f'_F f'_G + \dots = (1 - f'_F)^{-1} f'_G. \quad (13)$$

Mit diesem Ausdruck für f_{BS} in (8) ergibt sich nach Multiplikation mit $(1 - f'_F)$ die Gleichung

$$a_{BS} = (f'_F + f'_G) a_{BS}, \quad F = (1 + G) d. \quad (14)$$

Diese Gleichung sieht wieder formal aus wie (8) bzw. (5) und läßt sich auch entsprechend auf (1) umformen. Die Gesamtheit ihrer Graphen ist jedoch eine andere als in (8). Sämtliche, im Sinne von Abb. 1 überhaupt zerlegbaren Graphen sind zu streichen. Dagegen treten durch den Term f'_F in (14) noch Graphen hinzu mit einer topologischen Struktur, die weder in f_{BS} aus (8) noch vorher in der relativistischen Bethe-Salpeter-Gleichung enthalten waren.

Die TDL-Gleichung

Aus dem einzeitigen Formalismus der Störungstheorie wurde von Tamm¹, Dancoff² und Lévy³ eine Beschreibung des Zweikörperproblems gegeben, die auch auf die Gleichungen (1) bis (5) führt, deren Operator jedoch einer anderen Gesamtheit von Graphen zugeordnet werden muß. Ausgangspunkt ist das Eigenwertproblem der Feldtheorie

$$H \Psi = W \Psi, \quad H = H^0 - H', \quad \text{wie in (16)}. \quad (15)$$

Der Hilbertvektor Ψ besteht aus Anteilen a_n mit $n = 0$ bzw. $n \neq 0$, die den beiden Fermionen allein bzw. ihnen und noch weiteren virtuellen Teilchen zugeordnet werden. (15) wird dadurch zu einer Matrixgleichung bezüglich a_n :

$$\varepsilon_n a_n = (H'_{n0} a_0 + \sum_{m \neq 0} H'_{nm} a_m), \quad \varepsilon_n = H_n^0 - W. \quad (16)$$

Diese Gleichung wird für $n = 0$ und $n \neq 0$ niedergeschrieben. In der ersten der Gleichungen wird dann a_m für $m \neq 0$ dadurch eliminiert, daß ihr Wert aus der zweiten Gleichung successiv in die erste eingesetzt wird. Es wird mit $a_0 = a_{\text{TDL}}$:

$$a_{\text{TDL}} = \{ \varepsilon_0^{-1} H'_{00} + \sum_{n \neq 0} E_0^{-1} H'_{0n} \varepsilon_n^{-1} H'_{n0} + \dots \} a_{\text{TDL}}. \quad (17)$$

Wird die Klammer nun als Operator f_{TDL} bezeichnet, so folgen die Gln. (1) bis (5) unmittelbar, wenn man die H'_{nm} und ε_n mit den zugehörigen Integrationen nach der Feldtheorie einsetzt.

Aus dieser Ableitung ist dreierlei ersichtlich: Zum einen müssen bei (4) in den Zwischenzuständen der Graphen f_{TDL} alle Fermionenlinien mitgezählt werden, auch wenn sie sich im Anfangs- bzw. End-

zustand befinden. Dies geht aus der Definition von ε_n in (16) hervor. Das heißt also im Sinne von Abb. 1, daß f_{TDL} nur Graphen vom Typ f enthält, nicht dagegen solche vom Typ f' , f'' oder f''' . Zweitens enthält f_{TDL} keine Produktgraphen vom Typ der Abb. 1 ff' , da diese letzteren in (17) durch einen Zwischenzustand mit $n = 0$ vertreten wären und der Ableitung entsprechend ausfallen. Darüber hinaus unterliegt drittens die Bildung von Graphen entsprechend (17) keinen weiteren einschränkenden Bedingungen. Neben allen unzerlegbaren Graphen f_H einer Gesamtheit H sind also auch alle die Graphen in f_{TDL} enthalten, welche eine Darstellung entsprechend Abb. 1 $f_{(2)}$ erlauben. Die Gesamtheit H selbst besteht aus allen Graphen, die sich überhaupt bilden lassen, einschließlich der Vakuumgraphen V : also aus den Graphen VG , Vd und VGd , mit $G = \sum (DC)^n$. Wir erhalten daher

$$a_{\text{TDL}} = f_{\text{TDL}} a_{\text{TDL}}, \quad f_{\text{TDL}} = \sum_{n=1}^{\infty} f_H^n, \quad (18)$$

$$H = V [(1 + G) d + G] \quad (18)$$

und verstehen unter f_{H^2} die zusammengesetzten Graphen von Typ $f_{(2)}$, bei denen jede der getrennten Strukturen für sich alle Graphen von H durchläuft. f_H^n ist dann die entsprechende Summe über alle Graphen, die n -fach zerlegbar sind im Sinne von Abb. 1 $f_{(2)}$.

Zusammenhang zwischen der BS- und TDL-Gleichung

Es soll nun der Zusammenhang zwischen den Gln. (8) und (18) für a_{BS} und a_{TDL} gesucht werden. Wir vernachlässigen zunächst alle Vakuumgraphen in H von (18) und kommen auf diese Frage am Schluß zurück. Unter dieser Vernachlässigung ist $H = F + G$, wie der Vergleich von (14) und (18) zeigt. Die zu vergleichenden Beziehungen schreiben wir nach (14) und (18)

$$a_{\text{BS}} = f_H' a_{\text{BS}}, \quad a_{\text{TDL}} = f_T a_{\text{TDL}}, \quad f_T = \sum_{n=1}^{\infty} f_H^n. \quad (19)$$

Ähnlich wie früher in (11) bei f_{BS} bilden wir nun die Potenzsumme der $(f_H')^n$:

$$\check{f}_H = \sum_{n=1}^{\infty} (f_H')^n = f_H' (1 - f_H')^{-1}. \quad (20)$$

Die Operatorenprodukte der gestrichenen Größen f_H' können wir jetzt im Sinne von (10) auswerten und erhalten

$$\check{f}_H = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1 \dots n_\nu} f_H^{n_1} f_H^{n_2} \dots f_H^{n_{\nu-1}} f_H^{n_\nu}. \quad (21)$$

In der zweiten Summe ist ν beliebig, und über die n_1, \dots, n_ν ist so zu summieren, daß deren Summe gleich n ist. Da in der ersten Summe aber weiter über alle n summiert wird, kann diese Bedingung fortfallen und wir sortieren die Summanden der Doppelsumme statt dessen nach $\nu = 1, 2, \dots$

$$\check{f}_H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_H^n \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_H^n \right\}^{\nu-2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_H^n \right\}. \quad (22)$$

Definieren wir neben f_T die Größen f_T' , f_T'' und f_T''' gemäß Abb. 1, so läßt sich (22) in der Form

$$\check{f}_H = f_T' + f_T' (1 - f_T)^{-1} f_T' \quad (23)$$

darstellen. (23) und (20) offenbaren den Zusammenhang zwischen f_T und f_H' , also zwischen den Operatoren der beiden Gleichungen von (19).

Die Transformation zwischen diesen beiden Gln. (19) für a_{BS} und a_{TDL} kann nun direkt vorgenommen werden. Aus (20) und (23) folgt nach Elimination von \check{f}_H :

$$f_T = 1 + f_T' (1 - f_H') [f_T' (1 - f_H') - f_H']^{-1} f_T'. \quad (24)$$

Mit der Darstellung (24) des Operators f_T lautet die Gleichung für a_{TDL} :

$$(1 - f_H') [f_T' (1 - f_H') - f_H']^{-1} f_T a_{\text{TDL}} = 0. \quad (25)$$

Die beiden Faktoren verleihen also a_{TDL} die Eigenschaft von a_{BS} , nämlich, daß die Anwendung des Operators $(1 - f_H')$ auf diese Größe Null ergibt. Bei den Umformungen (20) bis (25) ist zu beachten, daß der Operator \check{f}_H wegen (20) für die Eigenwerte $f_H' = 1$ nicht mehr definiert ist. Zweckmäßig wird zunächst der Eigenwert $1 - \varepsilon$ für f_H' bzw. f_T aufgesucht und später zur Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$ übergegangen.

Soweit die Größen a_{BS} und a_{TDL} durch nichts als die Wellengleichungen definiert sind, denen sie genügen, gilt also hier wegen (25) der Zusammenhang

$$[f_T' (1 - f_H') - f_H'] a_{\text{BS}} = f_T a_{\text{TDL}}, \quad (26')$$

der sich mit dem Eigenwert 1 von f_H' noch weiter vereinfacht zu

$$a_{\text{BS}} = f_T a_{\text{TDL}}. \quad (26)$$

Dabei ist darauf hinzuweisen, daß in diesem Sinne zum Beispiel a_{BS} und $y(f_H') a_{\text{BS}}$ mit y als beliebiger Funktion nicht unterschieden werden können, da beide der gleichen Wellengleichung genügen. \square

Diskussion

Nach einem einleitenden Hinweis in (6) und (7) auf Unbestimmtheiten, welche der Wellengleichung

(1) bzw. (5) anhaften, wurde die Gleichung für a_{BS} auf eine andere Gesamtheit von Graphen transformiert. Von dieser zweiten Form aus ließ sich ein Vergleich zwischen a_{BS} und a_{TDL} durchführen, der in der Angabe einer expliziten Transformationsvorschrift (26) zwischen beiden endete.

Die Durchführung dieser Transformation war möglich nach Streichung aller Vakuumgraphen in f_{TDL} , weil dann die Gesamtheiten H und $F + G$ gleich wurden. Oder in anderen Worten: Durch (25) und (26) und die zugehörigen Ableitungen läßt sich eine Streichung der Vakuumgraphen in der TDL-Gleichung rechtfertigen.

Das Renormalisierungsverfahren der Lévy-Graphen, über das in einer kurzen Mitteilung⁶ bereits berichtet wurde und das ausführlich unter diesem Thema in Teil III⁷ behandelt werden soll, läßt sich mit der gleichen Argumentation wie vorher bei den Vakuumgraphen nun auch auf die TDL-Gleichung übertragen⁹, falls f_T renormalisierbar ist.

Zusatz: Inzwischen haben Lehmann und Zimmermann¹⁰ zeigen können, daß die Divergenzen der

TDL-Gleichung sich prinzipiell durch Renormalisierung nur teilweise ausschalten lassen, da die Wellenfunktion a_{TDL} ihrer Definition nach weitere Divergenzen enthält, die mit der Auszeichnung des Zeitpunktes $T = 0$ zusammenhängen. Daraus ist zu schließen, daß der Prozeß der Renormalisierung auf den Transformationsoperator f_T nicht anwendbar ist. Weiter wurde inzwischen von Dyson¹¹ ein Vorschlag gemacht, durch eine andere Definition von a_{TDL} das Auftreten der Vakuumgraphen zu vermeiden. Die von ihm vorgeschlagene Wellenfunktion ist aber identisch mit der hier verwandten a_{BS} , also der einzeitigen BS-Wellenfunktion. Es ist daher auch nicht verwunderlich, daß diese Gleichung sich renormalisieren läßt, wie Dyson in seiner zweiten Note für die vierte Näherung zeigt.

Eine Auswertung des von Dyson angegebenen Gleichungssystems führt auf die hier abgeleitete Gl. (14). Vergleicht man die verschiedenen Dysonschen Definitionen von a_{TDL} und a_{BS} miteinander, so erhält man ebenfalls einen Zusammenhang zwischen beiden vom Typ (26), wie vom Verfasser an anderer Stelle gezeigt werden konnte¹². Der dort mit g bezeichnete Transformationsoperator geht in f_T über, wenn man in ihm die Vakuumgraphen vernachlässigt. Durch eine konsequente Auswertung der dort gewählten Ansätze lassen sich also die gleichen Resultate ebenfalls erzielen.

⁹ Von M. Cini, *Nuovo Cimento* **10**, 526, 614 [1953], wurde kürzlich die TDL-Gleichung bis zur 4. Ordnung der Kopplungskonstanten in eine relativistisch invariante Form gebracht, die ebenfalls eine Diskussion der Vakuumeffekte und der Renormalisierung ermöglicht.

¹⁰ Private Mitteilung.

¹¹ F. J. Dyson, *Physic. Rev.* **90**, 994 und **91**, 421 [1953].

¹² W. Macke, *Physic. Rev.* [1953], im Erscheinen.

Nichtlokale Feldtheorie auf der Grundlage der Salpeter-Bethe-Gleichung I. „Freie“ Teilchen

Von HERMANN L. JORDAN und WILHELM E. FRAHN*

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. **8a**, 620—628 [1953]; eingegangen am 3. August 1953)

Im Rahmen des durch die Salpeter-Bethe-Gleichung beschriebenen relativistischen Zweiteilchenproblems wird der Begriff des freien Teilchens als geeigneter Grenzfall aufgefaßt und am Beispiel des einfachsten irreduziblen Graphen 4. Ordnung (Kreuzgraphen) diskutiert. Daraus ergeben sich Rückschlüsse auf das allgemeine Einteilchenproblem mit vollständiger Wechselwirkung. Für das so definierte „freie“ Teilchen erhält man eine verallgemeinerte Dirac-Gleichung mit Strukturfunktion, die eine Formulierung des Massenproblems der Elementarteilchen ermöglicht. Die erhaltene Gleichung stimmt ihrer Form nach mit den aus den nichtlokalen Feldtheorien folgenden Einteilchengleichungen überein.

Der Begriff des freien Teilchens ist in die Quantentheorie als korrespondenzmäßiges Analogon zum kräftefreien Massenpunkt der klassischen Me-

chanik übernommen worden. Er ist einer Theorie fremd, deren wesentliche Merkmale sich in Unschärferelation und daraus folgender nicht vernach-

* Vorgetragen von W. E. Frahn auf der Tagung des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften in Innsbruck 1953.